Université Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année 2003-2004

Examen de Physique PC2
Epreuve de Mécanique du Solide
Session de Janvier (Durée : 2 h)

Une plaque (ABCD) plane rectangulaire homogène de masse m et de centre d'inertie G a pour longueur 2ℓ et pour largeur 2a ($AB = 2a$, $BD = 2\ell$). Le milieu E du côté AB est astreint à se déplacer **sans frottement** sur un axe fixe verticale $0z_0$; le côté opposé CD glisse **sans frottement** sur le plan horizontal x_0Oy_0 d'un repère galiléen $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. On désigne par $R_S(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé lié à la plaque dont l'axe Gx est horizontal, l'axe Gy situé dans le prolongement de EG et l'axe Gz perpendiculaire à la plaque et situé au dessus. La position de la plaque est repérée par les angles $\psi=(\widehat{\vec{Ox_0}, \vec{OH}})$ (H étant le milieu de CD) et $\theta=(\widehat{\vec{HO}, \vec{HE}})$. On désigne par $\vec{R}_E$ la réaction exercée au point E par l'axe Oz_0 sur la plaque. On exprimera tous les résultats dans la base liée au repère intermédiaire $R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$.

I- Cinématique

1- Donner le vecteur rotation instantané, $\vec{\omega}(S/R_0)$, de la plaque S par rapport à R_0.

2- Déterminer le torseur cinématique $\tau_{\vartheta}^{G}(S/R_0)$ de la plaque, par rapport au repère galiléen R_0, au point G.

II- Cinétique

1- Calculer la matrice d'inertie de la plaque au point G dans la base de R_S.

2- Déterminer le torseur cinétique $\tau_c^{G}(S/R_0)$ de la plaque au point G. En déduire son torseur cinétique $\tau_c^{E}(S/R_0)$ au point E.

3- Calculer l'énergie cinétique E_c de la plaque par rapport au repère galiléen R_0.

III- Dynamique

On suppose que les actions de contact exercées par le plan x_0Oy_0 sur la plaque sont équivalentes à une force unique $\vec{R}_I$ appliquée en un point I du côté CD de la plaque.

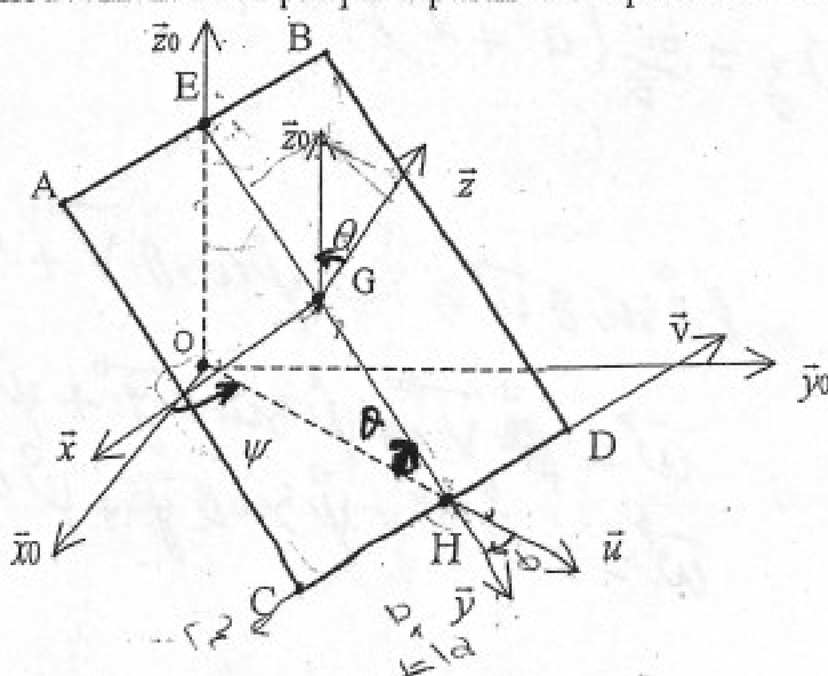
1- Ecrire, sous forme vectorielle, le théorème du moment dynamique au point E.

2- En projetant le théorème du moment dynamique sur l'axe Oz_0, déduire une intégrale première du moment cinétique et montrer que : $\dot{\psi}=\dfrac{\lambda}{a^2+4\ell^2\cos^2\theta}$ avec $\lambda = $ cst.

3- Ecrire, sous forme vectorielle, le théorème de la résultante dynamique. En déduire par projection sur l'axe Oz_0, l'expression de la réaction R_I.

4- Ecrire le théorème de l'énergie cinétique. Montrer que l'équation du mouvement est de la forme : $\dot{\theta}^2=f(\theta)$ ou $f(\theta)$ est une fonction que l'on déterminera.

5- Retrouver l'équation du mouvement de la plaque à partir des équations de Lagrange.



I- Cinématique 3 pts

1- $\vec{OG} = \vec{OE} + \vec{EG}$

$\vec{OE} = 2l\sin\theta\,\vec{z_0}$

$\vec{EG} = l\,\vec{y} = l\cos\theta\,\vec{u} - l\sin\theta\,\vec{z_0}$ 1,5

$\vec{OG} = l\cos\theta\,\vec{u} + l\sin\theta\,\vec{z_0}$

or $\vec{u} = \cos\psi\,\vec{x_0} + \sin\psi\,\vec{y_0}$

La plaque est repérée par les angles d'Euler ψ et θ.

$\vec{\omega}(S/R_0) = \dot\theta\,\vec{v} + \dot\psi\,\vec{z_0}$

2- $\vec{V}(E) = 2l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0}$

$\vec{V}(G) = \vec{V}(E) + \vec{\omega}(S/R_0)\wedge\vec{EG}$

$= 2l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0} + (\dot\theta\,\vec{v} + \dot\psi\,\vec{z_0})\wedge(l\cos\theta\,\vec{u} - l\sin\theta\,\vec{z_0})$

$= 2l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0} + l\dot\psi\cos\theta\,\vec{v} + l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0}$ 1,5

$\vec{V}(G) = -l\dot\theta\sin\theta\,\vec{u} + l\dot\psi\cos\theta\,\vec{v} + l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0}$

Calcul direct :

$\vec{V}(G) = \left.\dfrac{d\vec{OG}}{dt}\right|_{R_0} = -l\dot\theta\sin\theta\,\vec{u} + l\dot\psi\cos\theta\,\vec{v} + l\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0}$

II - Cinétique 5 pts

1°- Matrice d'inertie

R_G étant principal $I = \begin{pmatrix} I_x & & 0 \\ 0 & I_y & \\ & & I_z \end{pmatrix}$ 2 pts

$I_x = \int y^2\,dm = \sigma\int y^2\,dx\,dy = \sigma\,2a\cdot\dfrac{2l^3}{3} = \dfrac{m l^2}{3}$

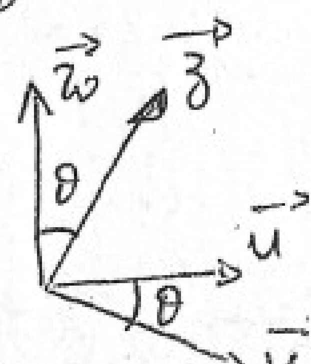
$I_y = \dfrac{m a^2}{3}$; $I_z = \dfrac{m}{3}(a^2 + l^2)$

$\tau_C = [\vec{P}, \vec{\sigma_G}]$

$\vec{P} = m\,\vec{V}(G) = -ml\dot\theta\sin\theta\,\vec{u} + ml\dot\psi\cos\theta\,\vec{v} + ml\dot\theta\cos\theta\,\vec{z_0}$

$\vec{\sigma_G} = I_G\,\vec{\omega}$; $\vec{\omega} = \dot\theta\,\vec{v} - \dot\psi\sin\theta\,\vec{y} + \dot\psi\cos\theta\,\vec{z}$

$\vec{\omega} = -\dot\theta\,\vec{x} - \dot\psi\sin\theta\,\vec{y} + \dot\psi\cos\theta\,\vec{z}$



$\vec{\sigma}_G = m\frac{l^2}{3}\dot\theta \vec{v} + m\frac{1}{3}\dot\psi\cos\theta\sin\theta\,\vec{u} + \frac{m}{3}[a^2 + l^2\cos^2\theta]\dot\psi\,\vec{z}_0$

~~$\vec{\sigma}_E = \vec{\sigma}_G + m\,\vec{V}(G)\wedge\vec{V}(G)$~~ $\vec{\sigma}_E = \vec{\sigma}_G + m\,\vec{V}(G)\wedge\vec{GE}$

$$\vec{V}(G)\wedge\vec{GE} = \begin{vmatrix} -l\dot\theta\sin\theta \\ l\dot\psi\cos\theta \\ l\dot\theta\cos\theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -l\cos\theta \\ 0 \\ l\sin\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l^2\dot\psi\sin\theta\cos\theta \\ l^2\dot\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\ l^2\dot\psi\cos^2\theta \end{vmatrix}$$ 1 pt

$$\vec{\sigma}_E = \frac{2}{3}m l^2\dot\psi\sin 2\theta\,\vec{u} + m l^2\left(\frac{1}{3} - \cos 2\theta\right)\dot\theta\,\vec{V} + \frac{m}{3}\dot\psi[a^2 + 4l^2\cos^2\theta]\vec{z}_0$$ 1 pt

2 – $2E_c = m\vec{V}(G)^2 + \vec{\sigma}_G\cdot\vec{\omega}$

$2E_c = (m l^2\dot\theta^2 + m l^2\dot\psi^2\cos^2\theta) + \left(m\frac{l^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{m}{3}(a^2 + l^2\cos^2\theta)\dot\psi^2\right)$ 1 pt

$2E_c = \frac{4}{3}m l\dot\theta^2 + \frac{m}{3}(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)\dot\psi^2$

I – Dynamique. 11 pts

1. Théorème de la résultante dynamique :

$m\frac{d\vec{V}(G)}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_I + \vec{R}_E$

Théorème du moment dynamique.

$\vec{\delta}_E = \vec{\mathcal{M}}_E(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_E(\vec{R}_I)$ 4 pts

$\vec{\delta}_E = \vec{EG}\wedge\vec{P} + \vec{EI}\wedge\vec{R}_I$

2 – $\vec{\delta}_E = \frac{d\vec{\sigma}_E}{dt} + m\,\vec{V}(E)\wedge\vec{V}(G)$

3 – $\frac{d\vec{\sigma}_E}{dt} + m\,\vec{V}(E)\wedge\vec{V}(G) = (\vec{EG}\wedge\vec{P}) + (\vec{EI}\wedge\vec{R}_I)$

$\vec{z}_0\cdot\frac{d\vec{\sigma}_E}{dt} + m\,\vec{z}_0\cdot(\vec{V}(E)\wedge\vec{V}(G)) = \vec{z}_0\cdot(\vec{EG}\wedge\vec{P}) + \vec{z}_0\cdot(\vec{EI}\wedge\vec{R}_I)$

$\frac{d}{dt}(\vec{z}_0\cdot\vec{\sigma}_E) + m\,\vec{V}(G)\cdot(\vec{z}_0\wedge\vec{V}(E)) = (\vec{P}\wedge\vec{z}_0)\cdot\vec{EG} + (\vec{R_I}\wedge\vec{z}_0)\cdot\vec{EI}$

$\vec{z}_0 \parallel \vec{V}(G) \parallel \vec{P} \parallel R_I \Longrightarrow$

$\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_E = cst$

$\frac{m}{3}(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)\dot{\psi} = cst$ 5 pts

$(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)\dot{\psi} = \lambda$

4°- $\vec{\delta}_E = \left.\frac{d\vec{\sigma}_E}{dt}\right|_{R_0} + m\vec{V}(E) \wedge \vec{V}(G)$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_E}{dt}\right|_{R_0} = ml^2 \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\ddot{\psi}\sin 2\theta + \frac{4}{3}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos 2\theta - (\frac{1}{3} - \cos 2\theta)\dot{\theta}\dot{\psi} \\ (\frac{1}{3} - \cos 2\theta)\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}^2\sin 2\theta + \frac{2}{3}\dot{\psi}^2\sin 2\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m\vec{V}(E) \wedge \vec{V}(G) = m \begin{vmatrix} -2l^2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos^2\theta \\ -l^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\delta}_E = ml^2 \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\ddot{\psi}\sin 2\theta + \frac{4}{3}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos 2\theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \\ (\frac{1}{3} - \cos 2\theta)\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2\sin 2\theta + \frac{2}{3}\dot{\psi}^2\sin 2\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{P}) = \vec{EG} \wedge \vec{P} = -mgl\,\vec{y} \wedge \vec{z}_0 = mgl\cos\theta\,\vec{V}$

$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{R}_I) = \vec{EI} \wedge \vec{R}_I = R_I\,\vec{EI} \wedge \vec{z}_0$

$\vec{EI} = \vec{GI} - \vec{GE} = \xi\vec{x} + (l+l)\vec{y} = -\xi\vec{V} + 2l\cos\theta\,\vec{u} - 2l\sin\theta\,\vec{z}_0$

$\vec{\mathcal{M}}_E(\vec{R}_I) = -R_I\xi\vec{u} - 2lR_I\cos\theta\,\vec{V} = -R_I\xi\vec{u} - 2lR_I\cos\theta\,\vec{V}$

par projection sur l'axe OV :

① $ml^2(\frac{1}{3} - \cos 2\theta)\ddot{\theta} + ml^2\dot{\theta}^2\sin 2\theta + \frac{2}{3}ml^2\dot{\psi}^2\sin 2\theta = mgl\cos\theta - 2lR_I\cos\theta$

Theorème de la résultante dynamique

$m\frac{d\vec{V}(G)}{dt} = -mg\vec{z}_0 + R_I\vec{z}_0 + \vec{R}_E$

$m\vec{z}_0 \frac{d}{dt} \cdot \vec{V}(G) = -mg + R_I$ $\quad (\vec{R}_E \cdot \vec{z}_0 = 0$ par de frottement $\Rightarrow$ $\vec{R}_E \perp \vec{z}_0)$

$$m \frac{d\vec{z}_0}{dt} \cdot \vec{V}(G) = -mg + R_I$$

$$m l \ddot{\theta} \cos\theta - m l \dot{\theta}^2 \sin\theta = -mg + R_I$$

$$R_I = m l \ddot{\theta} \cos\theta - m l \dot{\theta}^2 \sin\theta + mg$$

En injectant R_I et $\dot{\psi} = \frac{\lambda}{a^2 + 4l^2\cos^2\theta}$ dans l'équation (1)

On obtient:

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{2}{3} \frac{l^2 \lambda^2 \sin 2\theta}{(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)^2} + mgl\cos\theta = 0$$

En multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant on obtient:

$$l^2 \dot{\theta}^2 + \int \frac{l^2 \lambda^2 \sin 2\theta \, \dot{\theta}}{(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)^2} dt + \frac{3m}{2} gl \sin\theta = cste$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda^2}{4l^2(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin\theta = cste$$

$cste = 0 \Rightarrow$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{-\lambda^2}{4l^2(a^2 + 4l^2\cos^2\theta)} - \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = f(\theta)$$

Theorème de l'energie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} = P(\vec{P}) + P(\vec{R}_I) + P(\vec{R}_E)$$

$P(\vec{P}) = -mg\vec{z}_0 \cdot \vec{V}(G) = -mlg\dot{\theta}\cos\theta$

$P(\vec{R}_I) = \vec{R}_I \cdot \vec{V}(I) = 0$ (pas de frottement $\Rightarrow \vec{R}_I \perp \vec{V}(I)$)

$P(\vec{R}_E) = \vec{R}_E \cdot \vec{V}(E) = 0$ (pas de frottement $\Rightarrow \vec{R}_E \perp \vec{V}(E)$)

$$\frac{dE_c}{dt} = -mgl\dot{\theta}\cos\theta \implies E_c = -mgl\sin\theta + cst$$

$$E_c + mgl\sin\theta = cst.$$

$$\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{6}\frac{\lambda^2}{a^2+4l^2\cos^2\theta} + mgl\sin\theta = cst.$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda^2}{4l^2(a^2+4l^2\cos^2\theta)} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta = cst.$$

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta - \frac{\lambda^2}{4l^2(a^2+4l^2\cos^2\theta)} \qquad (cst = 0)$$

UNIVERSITE MOHAMMED V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Physique

Session d'Automne
12/01/2010

Filière SMI-SMA
Semestre 3

Epreuve de Mécanique du Solide
Section A

Dans le plan (x_0Oy_0) d'un repère fixe orthonormé direct galiléen $R_0=(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ où $\overrightarrow{Ox_0}$ désigne la verticale descendante, on considère un cerceau (C) de centre C, de rayon a et de masse m, fixe au point O qui effectue un mouvement de rotation autour du point O. Les extrémités d'une barre (AB) homogène, pesante de masse m, de longueur $2\ell<2a$ et de centre d'inertie G, se déplacent sans frottement sur (C). On pose $2\alpha = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$, $\theta=(\overrightarrow{Ox_0},\overrightarrow{Ou})$ et on note par g l'intensité de la pesanteur.

On défini deux autres repères intermédiaires orthonormés directs : $R_1=(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z}_0)$ lié au cerceau (C) tel que $\vec{x}=\dfrac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$ et $R_2=(C;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0)$ lié à la barre (AB) tel que $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{CG}}{\|\overrightarrow{CG}\|}$ et on désigne par φ l'angle entre les axes Ox_0 et Ox.

Tous les résultats devront être exprimés dans la base du repère R_2.

Cinématique

1,5 pt 1- Déterminer la vitesse absolue, $\vec{V}(G/R_0)$, du centre d'inertie G de la barre (AB). En déduire la vitesse absolue, $\vec{V}(A\in(AB)/R_0)$, du point A de la barre.

1 pt 2- Déterminer la vitesse absolue, $\vec{V}(A\in C/R_0)$, du point A du cerceau. En déduire la vitesse de glissement, $\vec{V}_g((AB)/C)$, de la barre (AB) sur le cerceau C.

Cinétique

1- Déterminer le torseur cinétique de la barre (AB) au point G.
2- Déterminer le torseur dynamique de la barre (AB) au point C.
3- Calculer l'énergie cinétique, E_c de la barre (AB).

Dynamique

1- En appliquant le théorème du moment dynamique, déterminer une équation du mouvement de la barre (AB).
2- Déduire à partir du théorème de l'énergie cinétique une intégrale première du mouvement.

1- $V(G/R_0) = \frac{d\,OG}{dt}\Big|_{R_0}$; $OG = a\cos\alpha\, u$

1,5 $\vec{V}(G/R_0) = a\dot{\varphi}\vec{y} + a\cos\alpha\dot{\theta}\vec{v} = a\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi)\vec{u} + (a\cos\alpha\dot{\theta} + a\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi))\vec{v}$

$\vec{y} = \sin(\theta \ldots + \cos(\theta \ldots$

$\vec{V}(A\in T/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\omega}(T/R_0)\wedge\vec{GA}$

$= a\dot{\varphi}\vec{y} + a\cos\alpha\dot{\theta}\vec{v} + \dot{\theta}\vec{z}_0\wedge(-a\cos\alpha\,\vec{u})$

$\vec{V}(A\in T/R_0) = a\dot{\varphi}\vec{y} + a\cos\alpha\dot{\theta}\vec{v} + a\dot{\theta}\sin\alpha\,\vec{u}$

1,5 $\vec{V}(A\in T/R_0) = a(\dot{\theta}\sin\alpha + \dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi))\vec{u} + a(\dot{\theta}\cos\alpha + \dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi))\vec{v}$

2- $\vec{V}(A\in C/R_0) = a\dot{\varphi}\vec{y} + a\dot{\varphi}\vec{z}_0\wedge\vec{u}_1$

$= a\dot{\varphi}\vec{y} + a\dot{\varphi}\sin\alpha\,\vec{u} + a\dot{\varphi}\cos\alpha\,\vec{v}$

0,5 $\vec{V}(A\in C/R_0) = a(\dot{\varphi}\sin(\theta-\varphi) + \dot{\varphi}\sin\alpha)\vec{u} + a\dot{\varphi}(\cos(\theta-\varphi) + \cos\alpha)\vec{v}$

$\vec{V}_g = \vec{V}(A\in T/R_0) - \vec{V}(A\in C/R_0)$

0,5 $\vec{V}_g = a(\dot{\theta}-\dot{\varphi})[\sin\alpha\,\vec{u} + \cos\alpha\,\vec{v}] = a(\dot{\theta}-\dot{\varphi})\vec{v}_1$

<u>Cinétique</u>

$\mathcal{C}_c^G = [\vec{P}, \vec{\sigma}(G,T/R_0)]$

0,5 $\vec{P} = m\vec{V}(G/R_0)$

1,5 $\vec{\sigma}(G,T/R_0) = I(T/R_0)\,\vec{\omega}(T/R_0) = m\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}\vec{z}_0$

2- $\vec{\delta}(C,T/R_0) = \vec{\delta}(G,T/R_0) + m\vec{\gamma}(G)\wedge\vec{GC}$

2 $= m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\theta}\vec{z}_0 + m\underbrace{(a\ddot{\varphi}\vec{y} + a\cos\alpha\ddot{\theta}\vec{v} - a\dot{\varphi}^2\vec{x} - a\cos\alpha\dot{\theta}^2\vec{u})}_{\gamma(G)}\wedge \ldots$

$\vec{\delta}(C,T/R_0) = m\left[\frac{\ell^2}{3}\ddot{\theta} + a^2\ddot{\varphi}\cos\alpha\cos(\theta-\varphi) + a^2\cos^2\alpha\,\ddot{\theta} + a^2\dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)\cos\alpha\right]\vec{z}_0$

$\vec{\delta}(C,T/R_0) = \left[m\left(\frac{\ell^2}{3} + a^2\cos^2\alpha\right)\ddot{\theta} + ma^2\ddot{\varphi}\cos\alpha\cos(\theta-\varphi) + ma^2\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin(\theta-\varphi)\right.$

3- $2E_c = m\vec{V}^2(G) + \vec{\sigma}(G,T/R_0)\,\vec{\omega}(T/R_0)$

2 $2E_c = ma^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\cos^2\alpha\,\dot{\theta}^2 + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\alpha\cos(\theta-\varphi) + m\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$

<u>Dynamique</u>

- $\vec{\delta}(C,T/R_0) = \vec{M}_C(\vec{P}) + \vec{M}_C(\vec{R}_A) + \vec{M}_C(\vec{R}_B)$; $\vec{M}_C(\vec{R}_A) = \vec{CA}\wedge\vec{R}_A = \vec{CA}\wedge\ldots = 0$

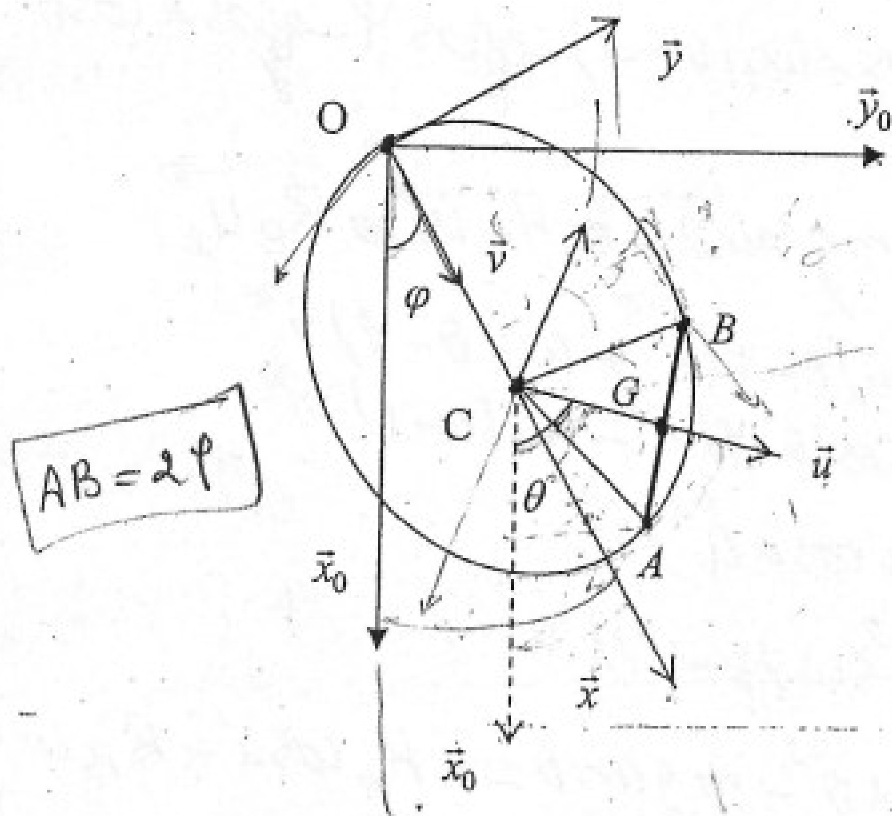
$\vec{M}_C(\vec{R}_B) = 0$.

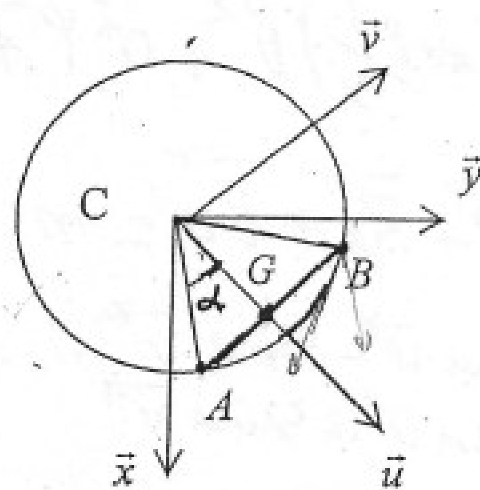
1,5 $\vec{M}_C(\vec{P}) = \vec{CG}\wedge mg\vec{x}_0 = a\cos\alpha\, mg\,\vec{u}\wedge\vec{x}_0$

$= -a\cos\alpha\, mg\sin\theta\,\vec{z} = -amg\cos\alpha\sin\theta\,\vec{z}_0$

3p5 3- Calculer explicitement les réactions $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ aux points A et B respectivement en fonction des paramètres du système. On évaluera $\vec{R}_A$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ défini par $\vec{OA} = a\,\vec{u}_1$ (CA), $\vec{v}_1 = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}_1$ et $\vec{R}_B$ dans la base $(\vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_0)$ défini par $\vec{OB} = a\,\vec{u}_2$ (C), $\vec{v}_2 = \vec{z}_0 \wedge \vec{u}_2$.

2p5 4- Calculer explicitement les composantes de la réaction $\vec{R}_o = R_u\,\vec{u} + R_v\,\vec{v}$ au point de contact O.

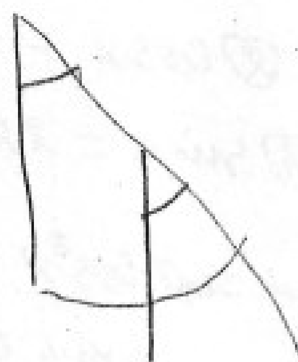




AB = 2ρ

$a \cos\alpha = |\vec{CG}|$





$-\left(\frac{\ell^2}{3}+a^2\cos^2\alpha\right)\ddot\theta + a\cos\alpha\cos(\theta-\varphi)\ddot\varphi - a\cos\alpha\sin(\theta-\alpha)\dot\varphi + am g\cos\alpha\sin$

2- $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}(\vec P)\quad (\mathcal{P}(\vec R_A) = \mathcal{P}(\vec R_B) = 0)$

$\mathcal{P}(\vec P) = \vec P \cdot \vec V(G) = mg\,\vec x_0 \cdot \vec V(G) = -mg(a\dot\varphi\sin\varphi + a\dot\theta\cos\alpha\sin$

$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_t = -am(\dot\varphi\sin\varphi + \cos\alpha\,\dot\theta\sin\theta) = +amg\frac{d}{dt}(\cos\varphi + \cos\alpha\,\theta$

$E_c - am\cos\varphi - am\cos\alpha\cos\theta = cst.$

$a\dot\varphi^2 + a\cos^2\alpha\,\dot\theta^2 + 2a\dot\theta\dot\varphi\cos\alpha\cos(\theta-\alpha) + \frac{\ell^2}{3a}\dot\theta^2 - \cos\varphi - \cos\alpha\cos\theta$

2,5 $\left(a^2\cos^2\alpha + \frac{\ell^2}{3}\right)\dot\theta^2 + a^2\dot\varphi^2 + 2a^2\dot\theta\dot\varphi\cos\alpha\cos(\theta-\alpha) - ag\cos\varphi - ag\cos\alpha\cos\theta$

3- $m\vec\gamma(G) = \vec P + \vec R_A + \vec R_B = mg\cos\theta\,\vec u - mg\sin\theta\,\vec v + R_A\vec u_1 + R_B\vec u_2$

$\vec u_1 = \cos\alpha\,\vec u - \sin\alpha\,\vec v \quad ; \quad \vec y = \sin(\theta-\varphi)\vec u + \cos(\theta-\varphi)\vec v$

$\vec u_2 = \cos\alpha\,\vec u + \sin\alpha\,\vec v \quad ; \quad \vec x = \cos(\theta-\varphi)\vec u - \sin(\theta-\varphi)\vec v$

$\vec\gamma(G) = \left(a\ddot\varphi\sin(\theta-\varphi) - a\dot\varphi^2\cos(\theta-\varphi) - a\cos\alpha\,\dot\theta^2\right)\vec u$

$\quad + \left(a\cos\alpha\,\ddot\theta + a\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) + a\dot\varphi^2\sin(\theta-\varphi)\right)\vec v$

$* (1)\; ma\ddot\varphi\sin(\theta-\varphi) - ma\dot\varphi^2\cos(\theta-\varphi) - ma\cos\alpha\,\dot\theta^2 - mg\cos\theta = -R_A\cos\alpha - R_B\cos$

$* (2)\; ma\cos\alpha\,\ddot\theta + ma\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) + am\dot\varphi^2\sin(\theta-\varphi) + mg\sin\theta = R_A\sin\alpha - R_B\sin\alpha$

$(1)\sin\alpha + (2)\cos\alpha = -2R_B\sin\alpha\cos\alpha$

$(2)\cos\alpha - (1)\sin\alpha = 2R_A\sin\alpha\cos\alpha$

$2R_A\sin\alpha\cos\alpha = ma\cos^2\alpha\,\ddot\theta + ma\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi+\alpha) + ma\dot\varphi^2\sin(\theta-\varphi-\alpha) + ma\cos\alpha\sin\alpha\,\dot\theta^2$

$\quad + mg\sin(\theta-\alpha)$

$2R_B\sin\alpha\cos\alpha = -am\cos^2\alpha\,\ddot\theta - am\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi-\alpha) - am\dot\varphi^2\sin(\theta-\varphi-\alpha) + am\cos\alpha\sin\alpha$

$\quad - mg\sin(\theta+\alpha)$

4- $m(\vec\gamma(C) + \vec\gamma(G)) = \vec R_D + \vec P_1 + \vec P_2\;;\; \vec P_1 = mg\,\vec x_0\;,\; \vec P_2 = mg\,\vec x_0$

$\vec\gamma(C) = a\ddot\varphi\,\vec y - a\dot\varphi^2\,\vec x$

$\begin{cases} R_u = 2am\ddot\varphi\sin(\theta-\varphi) - 2am\dot\varphi^2\cos(\theta-\varphi) - am\cos\alpha\,\dot\theta^2 - 2mg\cos\theta \\ R_v = am\cos\alpha\,\ddot\theta + 2am\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) + 2am\dot\varphi^2\sin(\theta-\varphi) + 2mg\sin\theta \end{cases}$

UNIVERSITE MOHAMMEDV-AGDAL
FACULTE DES SCIENCES

Année Universitaire: 2010-2011
Filière SMI&SMA -Semestre 3

Contrôle final de Mécanique du Solide
Session Automne- Rattrapage
Durée 1h 30mn

On considère une tige (AB), homogène, de masse m, de longueur 2a et de centre d'inertie G qui glisse **sans frottement** à l'intérieur d'un anneau (A) circulaire de centre C et de rayon r. Tout en restant dans le plan vertical (xOy) du repère fixe R (O, x, y, z), l'anneau roule sur l'axe Ox du repère R avec une vitesse angulaire ω **constante.** On désigne par, θ l'angle formé, à chaque instant, entre les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$; x l'abscisse du point C sur l'axe Ox ; $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ le vecteur accélération de la pesanteur ; I le point de contact de l'anneau avec l'axe Ox et ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$) une base orthonormée directe liée à la tige (AB). On pose $\overrightarrow{CG} = L\vec{u}$.

1-Calculer le torseur cinématique de la tige (AB) au point G.

2-Calculer le moment d'inertie J de la tige (AB) par rapport à son axe Gz.

3-Déterminer le torseur dynamique de la tige (AB) au point G.

4-En appliquant le théorème du moment dynamique à la tige (AB) au point C, montrer que l'une de ses équations dans le repère R s'écrit :

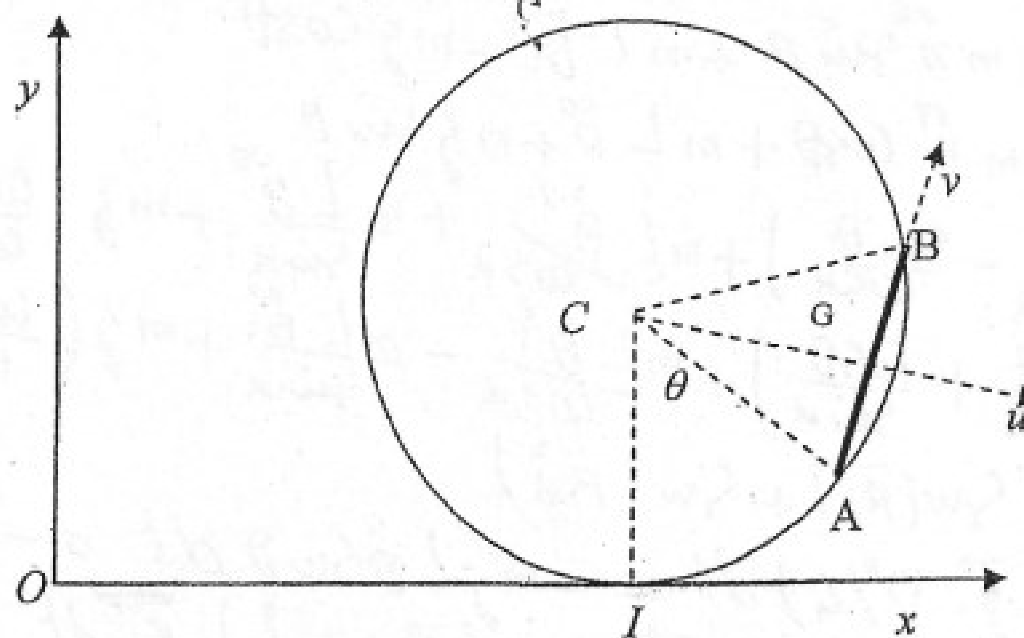
$$\ddot{\theta}[L + \frac{J}{mL}] + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

5-En utilisant le théorème de la résultante dynamique, calculer les réactions de contact aux points A et B

6-Calculer les travaux des forces extérieures exercées sur la tige (AB)

7-Retrouver l'équation du mouvement précédente à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

8-On suppose que le roulement de l'anneau (A) sur l'axe Ox s'effectue sans glissement. Calculer la période des petites oscillations de la tige (AB).

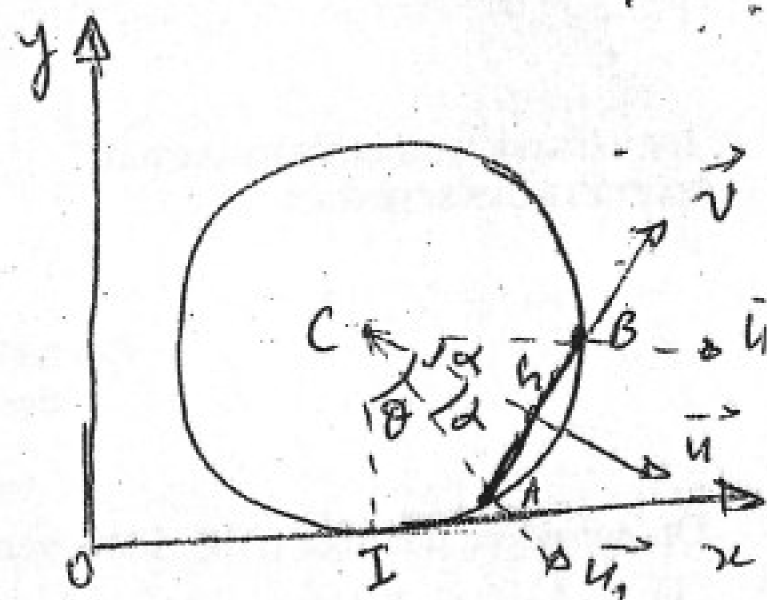


1- $\mathcal{T}_V^G(AB) = [\vec{\omega}(AB/R), \vec{V}(G)]$

(1) $\vec{\omega}(AB/R) = \dot{\theta}\vec{z}$

(1) $\vec{V}(G/R) = \dot{x}\vec{x} + L\dot{\theta}\vec{v}$

avec $L^2 = a^2 - r^2$



2- (2) $J = \lambda \int (u^2 + v^2)\, dv = \frac{m}{2a} \int_{-a}^{a} v^2\, dv = \frac{ma^2}{3}$

3- $\mathcal{T}_D^G(AB) = [m\vec{\gamma}(G); \vec{\delta}(G, AB/R)]$

(2) $\vec{\gamma}(G) = \ddot{x}\vec{x} - L\dot{\theta}^2\vec{u} + L\ddot{\theta}\vec{v}$

(1) $\vec{\delta}(G, AB/R) = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(G, AB/R) = J\ddot{\theta}\vec{z}$

4- $\vec{\delta}(C, AB/R) = \vec{CG} \wedge \vec{P} + \vec{R_A} \wedge \vec{AC} + \vec{CB} \wedge \vec{R_B}$

$\vec{R_A} = -R_A\vec{u_1}, \quad \vec{R_B} = -R_B\vec{u_2} \Rightarrow \vec{CA} \wedge \vec{R_A} = \vec{CB} \wedge \vec{R_B} = 0$

(1) $\vec{CG} \wedge \vec{P} = L\vec{u} \wedge (-mg\vec{y}) = -mgL\sin\theta\,\vec{z}$

$\vec{\delta}(C, AB/R) = \vec{\delta}(G, AB/R) + m\vec{\gamma}(G) \wedge \vec{GC}$

$= [J\ddot{\theta} + mL\ddot{x}\cos\theta + mL^2\ddot{\theta}]\vec{z}$

(2) $\vec{\delta}(C, AB/R) = Lm[(L\ddot{\theta} + \frac{J}{mL}) + \ddot{x}\cos\theta]\vec{z}$

$L\ddot{\theta} + \frac{J}{mL} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta = 0$

5- $m\vec{\gamma}(G) = \vec{P} + \vec{R_A} + \vec{R_B} = -mg\vec{y} - R_A\vec{u_1} - R_B\vec{u_2}$

(1) $m(\ddot{x}\vec{x} - L\dot{\theta}^2\vec{u} + L\ddot{\theta}\vec{v}) = -mg\vec{y} - R_A(\cos\alpha\,\vec{u} - \sin\alpha\,\vec{v}) - R_B(\cos\alpha\,\vec{u} + \sin\alpha\,\vec{v})$

$= -mg\vec{y} - (R_A + R_B)\cos\alpha\,\vec{u} + (R_A - R_B)\sin\alpha\,\vec{v}$

$\begin{cases} \cos\alpha = L/r \\ \sin\alpha = a/r \end{cases}$

$\begin{cases} (R_A + R_B)\cos\alpha = -m\ddot{x}\sin\theta + mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \\ (R_A - R_B)\sin\alpha = m\ddot{x}\cos\theta + mL\ddot{\theta} + mg\sin\theta \end{cases}$

(1) $R_A = \frac{1}{2}\left[m\ddot{x}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}\right) + \frac{mL\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} + \frac{mL\ddot{\theta}}{\sin\alpha} + mg\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right)\right]$

$R_B = \frac{1}{2}\left[-m\ddot{x}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\alpha} + \frac{\cos\theta}{\sin\alpha}\right) + \frac{mL\dot{\theta}^2}{\cos\alpha} - \frac{mL\ddot{\theta}}{\sin\alpha} + mg\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\right)\right]$

6- $\delta W = \delta W(\vec{P}) + \delta W(\vec{R_A}) + \delta W(\vec{R_B})$

(1) $\delta W(\vec{P}) = -mg\vec{y} \cdot \vec{V}(G)\, dt = -mgL\dot{\theta}\sin\theta\, dt = -mgL\sin\theta\, d\theta$

(1) $\delta W(\vec{R_A}) = \vec{V}(A) \cdot \vec{R_A}\, dt = (\vec{V}(G) + \dot{\theta}\vec{z} \wedge \vec{GA}) \cdot \vec{R_A}\, dt$

$\dot{x}\vec{x}) \cdot (-R_A\vec{u_1}) = -R_A\sin(\theta - \alpha)\, dx$

$\delta w(R_A) = + R_A \sin(\alpha - \theta) dx$

(1) $\delta w(\vec{R_B}) = \vec{R_B} \cdot \vec{V}(B) dt = - R_B \vec{u_2} \cdot (\vec{V}(G) + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{GB})$

$= - R_B \vec{u_2} \cdot (\dot{x} \vec{x} + L \dot{\theta} \vec{v} - a \dot{\theta} \vec{u})$

$= - R_B \sin(\alpha + \theta) dx - R_B \underbrace{(L \sin\alpha - a \cos\alpha)}_{= 0} d\theta$

$\delta w = -[R_B \sin(\alpha + \theta) + R_A \sin(\theta - \alpha)] dx - mgL \sin\theta d\theta$

$\delta w = [(-R_B + R_A) \sin\alpha \cos\theta - (R_A + R_B) \cos\alpha \sin\theta] dx - mgL \sin\theta d\theta$

7- $\frac{dE_c}{dt} = \delta w$

(1) $2E_c = m V^2(G) + \vec{\omega}(AB/R) \cdot \vec{\sigma_G}(AB/R)$

$2E_c = m\dot{x}^2 + mL^2 \dot{\theta}^2 + 2mL \dot{\theta} \dot{x} \cos\theta + J \dot{\theta}^2$

$\frac{dE_c}{dt} = m \ddot{x} \dot{x} + mL^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mL[(\ddot{\theta} \dot{x} + \dot{\theta} \ddot{x}) \cos\theta - \dot{x} \dot{\theta}^2 \sin\theta] + J \dot{\theta} \ddot{\theta}$

$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta w}{\delta t}$ (or roulement sans glissement $\rightarrow \vec{V_g} = \vec{V}(I) = 0$

$\vec{V}(I) = \dot{x} \vec{x} + r \dot{\varphi} \vec{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = -r\omega = cst$

$\Rightarrow \ddot{x} = 0$

$m \ddot{x} \dot{x} + mL^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mL \dot{x} \ddot{\theta} \cos\theta + mL \dot{\theta} \ddot{x} \cos\theta - mL \dot{x} \dot{\theta}^2 \sin\theta + J \dot{\theta} \ddot{\theta} =$

$m \ddot{x} \cos^2\theta + ~~\dots~~ + mL \dot{\theta} \ddot{x} \cos\theta + mg \sin\theta \cos\theta \dot{x} + m \ddot{x} \sin^2\theta \dot{x}$

$- mL \dot{\theta}^2 \sin\theta \dot{x} - mg \cos\theta \sin\theta \dot{x} - mgL \sin\theta \dot{\theta}$

$J \dot{\theta} \ddot{\theta} + mL^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mL \dot{\theta} \ddot{x} \cos\theta + mgL \sin\theta \dot{\theta} = 0$

(1) $L \ddot{\theta} + \frac{J}{mL} + \ddot{x} \cos\theta + g \sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} (L + \frac{J}{mL}) + \ddot{x} \cos\theta + g \sin\theta = 0$

8- roulement sans glissement $\Rightarrow$

$\vec{V_g} = \vec{V}(I \in GA/R) - \underbrace{\vec{V}(I \in Gon/R)}_{= 0} = (\dot{x} + r\dot{\varphi}) \vec{x} = (\dot{x} + r\omega)$

(1) $\vec{V_g} = 0 \Rightarrow \dot{x} = r\omega = cste \Rightarrow \ddot{x} = 0$.

$\ddot{\theta} (1 + \frac{J}{mL^2}) + g \sin\theta = 0$

(1) $\omega^2 = \frac{g}{1 + J/mL^2}$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1 + J/mL^2}{g}}$

(A)

3,45

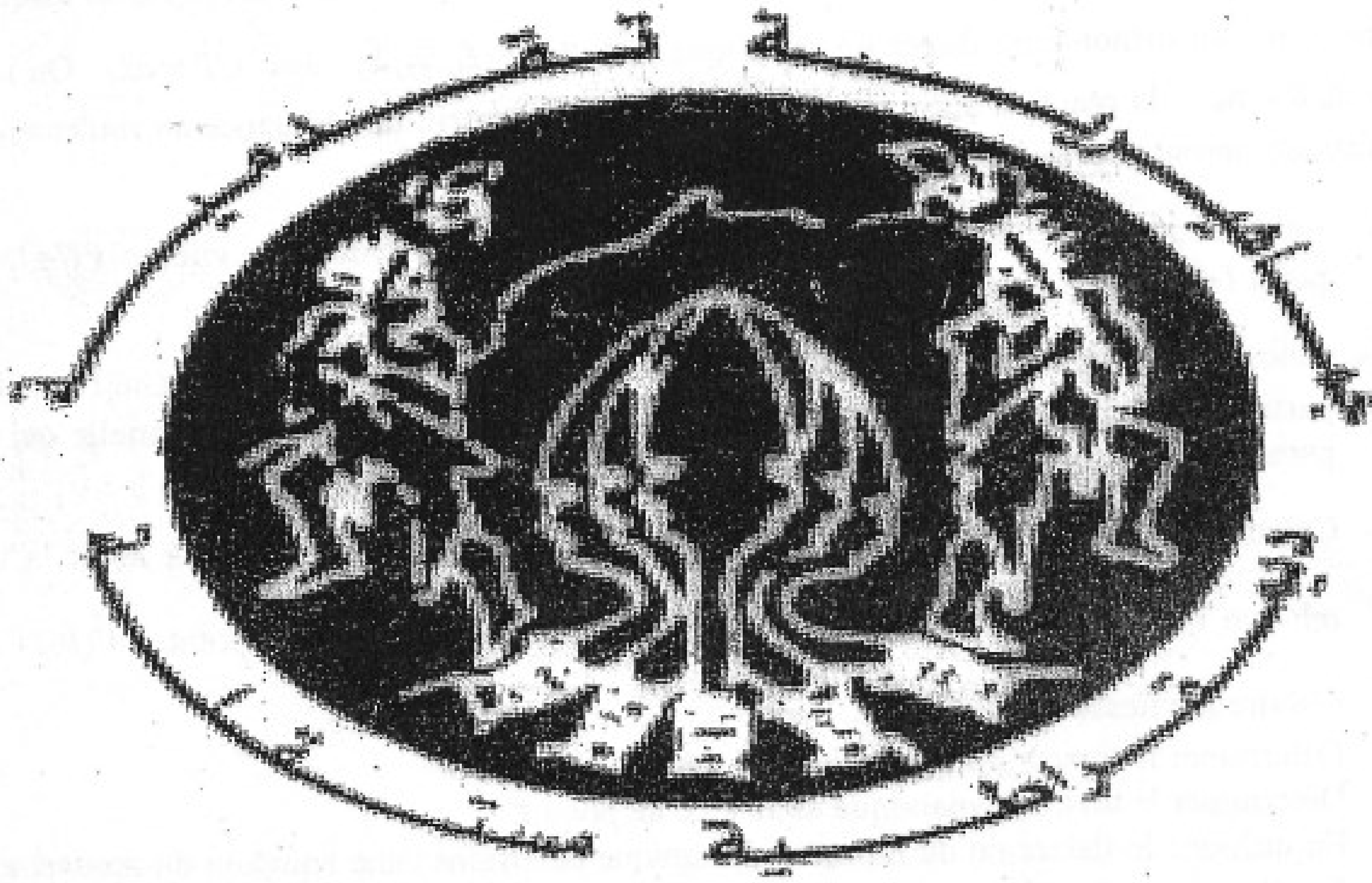
بسم الله الرحمان الرحيم

St.

الإتحاد الوطني لطلبة المغرب
مكتب التعاضدية

جامعة محمد الخامس
كلية العلوم
الرباط

19



الأيام العلمية تحت شعار قوله تعالى:

"يرفع الله الذين آمنوا منكم و الذين أوتوا العلم درجات و الله بما تعملون خبير"

FILIERE : SMP4

MODULE : SOLIDE

Total 10,5

UNIVERSITE MOHAMMED V-AGDAL
FÀCULTE DES SCIENCES
Département de Physique

Année universitaire :2008-2009

Filière SMI-SM
Session d'automne
Semestre 3

Examen de Mécanique du Solide
Rattrapage
Durée 1h30mn

Soient $R_0\ (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère fixe orthonormé direct et $R_1\ (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct obtenu à partir de R_0 par une rotation d'angle θ. Un disque D de centre C, de masse m et de rayon a roule sans glisser sur l'axe Ou tout en restant dans le plan $(Ox\ ,\ Oy)$ du repère R_0. On pose $\vec{OI} = r\,\vec{u}$ et $(\widehat{\vec{Cx}, \vec{CP}}) = \varphi$ où I est le point de contact du disque avec l'axe Ou et P un point du disque . On défini le repère orthonormé direct lié au disque par $R_s\ (C, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{k})$ avec $\vec{CP} = a\vec{x}_s$. On note par $\vec{R}_I = R_u\,\vec{u} + R_v\,\vec{v}$ la réaction au point I et on néglige le moment de résistance au roulement. Tous les résultats seront exprimés dans la base $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

3 pts (1+1+1) 1- Calculer la vitesse $\vec{V}(C/R_0)$ du centre C du disque. En déduire la vitesse $\vec{V}(I \in D/R_0)$ du point I du disque par rapport à R_0.

pts (0,5+0,5+0,5+0,5) 2- Calculer la vitesse de glissement $\vec{V}_g(D/Ou)$ du disque par rapport à l'axe Ou. En déduire, à partir de la condition de roulement sans glissement, une équation différentielle qui lie les paramètres du système. Quel est le degré de liberté du système ?

pts (0,5+1+0,5+0,5) 3- Calculer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(I \in D/R_0)$ du point I par rapport à R_0 et la vitesse relative $\vec{V}_r(I \in D/R_1)$. Retrouver l'expression de la vitesse absolue du point I, $\vec{V}(I \in D/R_0)$ et déduire la vitesse de glissement $\vec{V}_g(D/Ou)$. Que peut-on conclure.

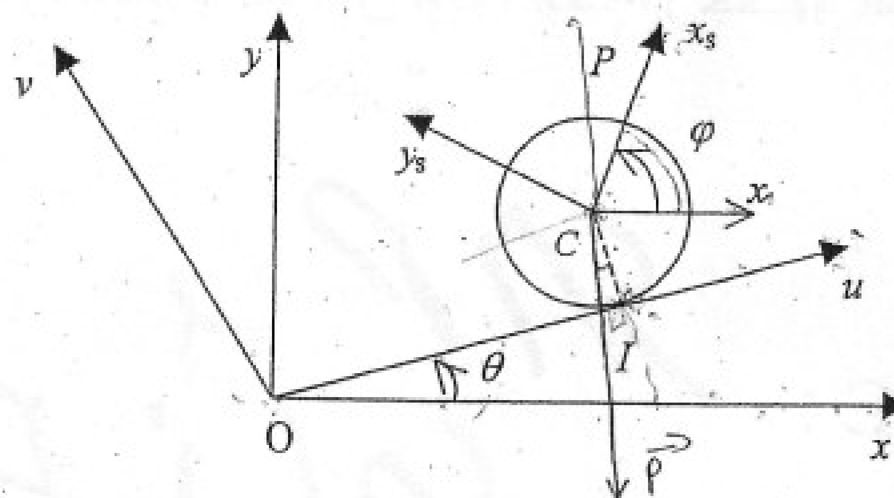
pts (1+0,5+0,5+1) 4- Déterminer le torseur cinétique du disque au point I.

pts (1+0,5+0,5+1) 5- Déterminer le torseur dynamique du disque au point I.

pts (0,5+0,5+1) 6- En utilisant le théorème du moment dynamique déterminer une équation du mouvement en fonction de r , θ et de leurs dérivées.

pts (1+0,5+0,5) 7- En utilisant le théorème de la résultante dynamique déterminer la réaction $\vec{R}_I$ au point I.

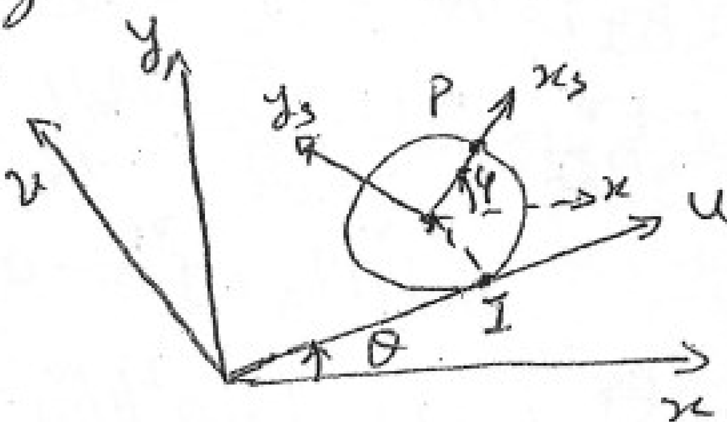
pts (0,5+0,5+1) 8- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, établir une deuxième équation du mouvement.



Examen - Rattrapage

SMI - SM - S3

2008/09



- $\vec{V}(I\in D/R_0) = \vec{V}(C/R_0) + \vec{\omega}(D/R_0)\wedge\vec{CI}$ 0,5

$\vec{V}(I\in D/R_0) = \underbrace{\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v} - a\dot{\theta}\vec{u}}_{1} + \dot{\varphi}\vec{z}_0\wedge(-a\vec{v})$

$\vec{V}(I\in D/R_0) = (\dot{r} + a\dot{\varphi} - a\dot{\theta})\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}$ 0,5

- $\vec{V}_g(D/OU) = \vec{V}(I\in D/R_0) - \vec{V}(I\in OU/R_0)$ 0,5

$\vec{V}(I\in OU/R_0) = r\dot{\theta}\vec{v}$ 0,5

$\vec{V}_g = (\dot{r} + a\dot{\varphi} - a\dot{\theta})\vec{u}$

$\vec{V}_g = 0 \Rightarrow \dot{r} + a\dot{\varphi} - a\dot{\theta} = 0$ 0,5

Degré de liberté 2. 0,5

- $\vec{V}_e(I\in D/R_0) = \vec{\omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{OI} = r\dot{\theta}\vec{v}$ 0,5

$\vec{V}_r(I\in D/R_0) = \vec{V}_r(C/R_1) + \vec{\omega}(D/R_1)\wedge\vec{CI}$

$\vec{V}_r(I\in D/R_0) = \dot{r}\vec{u} + (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\vec{z}_0\wedge\vec{CI}$

$\vec{V}_r(I\in D/R_0) = (\dot{r} + a(\dot{\varphi} - \dot{\theta}))\vec{u}$ 1

$\vec{V}(I\in D/R_0) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = (\dot{r} + a(\dot{\varphi} - \dot{\theta}))\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}$ 0,5

$\vec{V}_g(D/OU) = \vec{V}_r(I\in D/R_1) - \underbrace{\vec{V}_r(I\in OU/R_1)}_{=0}$ 0,5

$\vec{V}_g = (\dot{r} + a(\dot{\varphi} - \dot{\theta}))\vec{u}$ $\quad$ $\vec{V}_g$ est indépendant du repère choisi.

- $\tau_C^I = [\vec{P}, \vec{\sigma}_I]$; $\vec{P} = m\vec{V}(C) = m((\dot{r} + a\dot{\theta})\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v})$ 1

$\vec{\sigma}_I(D/R_0) = \vec{\sigma}_C(D/R_0) + m\vec{V}(C)\wedge\vec{CI}$ 0,5

$\vec{\sigma}_C(D/R_0) = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\vec{z}_0$; $m\vec{V}(C)\wedge\vec{CI} = -m(\dot{r} - a\dot{\theta})a\vec{z}_0$

$\vec{\sigma}_I(D/R_0) = [\frac{ma^2}{2}\dot{\varphi} - m\dot{r}a + ma^2\dot{\theta}]\vec{z}_0$ 0,5

$\vec{\sigma}_I(D/R_0) = [\frac{ma^2}{2}(2\dot{\theta} + \dot{\varphi}) - ma\dot{r}]\vec{z}_0$

- $\tau_D^I = [m\vec{\gamma}(C), \vec{\delta}_I]$

$m\vec{\gamma}(C) = m(\ddot{r} + a(\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}))\vec{u} + m(\ldots - m r\dot{\theta}^2\vec{u})$ 1

$\vec{\delta}_I(D/R_0) = \vec{\delta}_C(D/R_0) + m\vec{\gamma}(C) \wedge \vec{CI}$ 0,5

$\vec{\delta}_C(D/R_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_C(D/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \dfrac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\vec{z}_0$ 1

$m\vec{\gamma}(C) = \begin{cases} m(\ddot{r} - a\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2) \\ m(a\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$

$m\vec{\gamma}(C) \wedge \vec{CI} = -am(\ddot{r} + a(-\ddot{\theta}) - r\dot{\theta}^2)\vec{z}_0$

$\vec{\delta}_I(D/R_0) = \left[\dfrac{ma^2}{2}(2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) - am\ddot{r} + amr\dot{\theta}^2\right]\vec{z}_0$ 0,5

6°- $\vec{\delta}_I(D/R_0) = \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_I)$

$\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_I) = 0$ 0,5 ; $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) = \vec{IC} \wedge (-mg\vec{y}) = amg\sin\theta\,\vec{z}_0$ 0,5

$amr\dot{\theta}^2 + \dfrac{ma^2}{2}(2\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) - am\ddot{r} = amg\sin\theta$

or $a\ddot{\varphi} = a\ddot{\theta} - \ddot{r}$

$amr\dot{\theta}^2 + 3\dfrac{ma^2}{2}\ddot{\theta} - 3\dfrac{ma}{2}\ddot{r} = amg\sin\theta$

$\dfrac{2}{3}r\dot{\theta}^2 + a\ddot{\theta} - \dfrac{2}{3}g\sin\theta - a\ddot{r} = 0$ 1

7°- $m\vec{\gamma}(C) = \vec{P} + \vec{R}_I = -mg\vec{y} + R_u\vec{u} + R_v\vec{v}$ 1

par projection sur Ou et sur Ov :

~~$R_u - mg\sin\theta = m(\ddot{r} + a\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}))$~~

$\begin{cases} R_u = m(\ddot{r} - a\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2) + mg\sin\theta & 0{,}5 \\ R_v = mg\cos\theta + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + a\dot{\theta}^2) & 0{,}5 \end{cases}$

8°- $\dfrac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}_I)$

$\mathcal{P}(\vec{R}_I) = 0$ 0,5 ; $\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg\vec{y}\cdot\vec{V}(C) = -mg\vec{y}\cdot[(\dot{r} - a\dot{\theta})\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}]$

$\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg\dot{r}\sin\theta + amg\dot{\theta}\sin\theta - rmg\dot{\theta}\cos\theta$ 0,5

$2E_c = m\vec{V}^2(C) + \vec{\omega}(D/R_0)\cdot\vec{\sigma}_C(D/R_0)$

$2E_c = m(\dot{r} - a\dot{\theta})^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{ma^2}{2}\dot{\varphi}^2$

$2E_c = m(\dot{r} - a\dot{\theta})^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + \ldots$

$2E_c = \dfrac{3}{2}m(\dot{r} - a\dot{\theta})^2 + mr^2\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \left[\dfrac{3}{2}m(\ddot{r} - a\ddot{\theta})(\dot{r} - a\dot{\theta}) + m(r\dot{r}\dot{\theta}^2) + m(r^2\dot{\theta}\ddot{\theta})\right] = -mg\dot{r}\sin\theta + amg\dot{\theta}\sin\theta - rmg\dot{\theta}\cos\theta$

ou bien $\dfrac{3}{4}m(\dot{r} - a\dot{\theta})^2 + \dfrac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgr\sin\theta + amg\cos\theta = cste$ 1

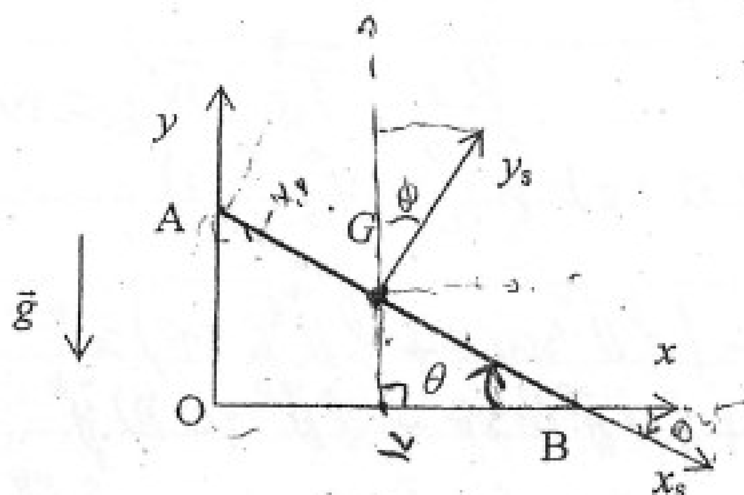
UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Janvier 2008

Examen de Mécanique du Solide
SMI-SM- S3

On considère une barre (AB) de longueur 2ℓ, de centre d'inertie G et de masse m, soumise à l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, en mouvement dans le plan (xOy) d'un repère galilléen orthonormé $R(O,x,y,z)$ où Oy est la verticale ascendante. Les extrémités A et B se déplacent tout en restant en contact respectivement avec l'axe Oy ($y>0$) et l'axe Ox ($x>0$). On note par $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ les forces de contact respectivement au points A et B et par μ le coefficient de frottement dynamique. Soient $R_s(G, x_s, y_s, z)$ le repère lié à la barre et θ l'angle que fait la barre avec l'axe Ox : $\theta = (\widehat{\vec{x},\vec{x}_s})$ (voir figure).

1- Donner la position du centre d'inertie en fonction de ℓ et de l'angle θ.
2- Donner la vitesse instantanée de rotation de la barre (AB) par rapport au repère R.
3- Calculer la vitesse du point matériel A; $\vec{V}(A\in(AB)/R)$. En déduire la vitesse du centre d'inertie, G, de la tige par rapport à R.
4- Déterminer le torseur cinétique de la barre (AB) au point G.
5- Déterminer le torseur dynamique de la barre (AB) au point G.
6- Appliquer le théorème de la résultante dynamique pour déterminer les forces de contact $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$.
7- En appliquant le théorème du moment dynamique au point A déterminez l'équation du mouvement de la barre (AB).
8- On suppose que les extrémités A et B de la barre glissent sur les axes Oy et Ox sans frottement , montrer que dans ce cas l'équation du mouvement s'écrit sous la forme : $\mathring{\theta}^2 = f(\theta)$ où $f(\theta)$ est une fonction que l'on déterminera. On prendra $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\mathring{\theta}(t=0) = 0$.
9- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, pour le cas où il n'y a pas de frottement, retrouver l'équation du mouvement de la barre (AB).

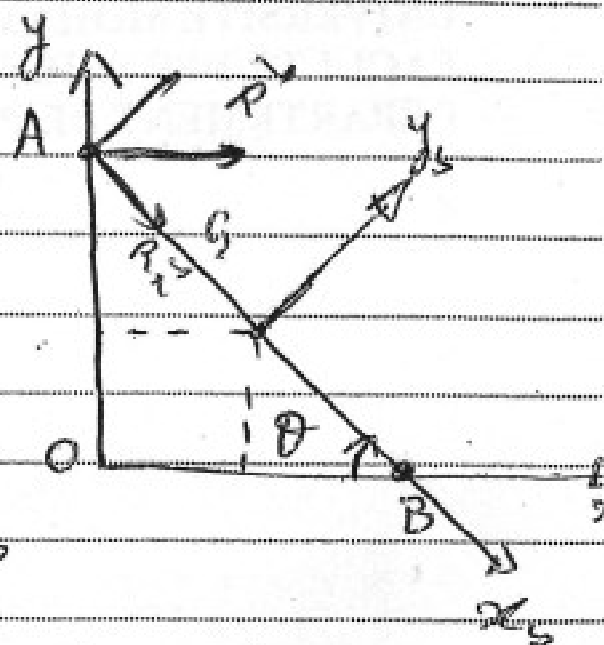


figure

Examen de M.S 2007-2008

SMI-SM3

Correction



1 pt 1- $\vec{OG} = l\cos\theta\,\vec{x} + l\sin\theta\,\vec{y}$

1 pt 2- $\vec{\omega}(AB/R) = -\dot{\theta}\,\vec{z}$

3- $\vec{OA} = 2l\sin\theta\,\vec{y}$

1 pt $\vec{V}(A/R) = 2l\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{y}$

1 pt $\vec{V}(G/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\omega}(AB/R)\wedge\vec{AG}$

$= 2l\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{y} - l\dot{\theta}\,\vec{y_5}$

1 pt + 1 pt 4- $\vec{\sigma}(AB/R) = I\vec{\omega} = -\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{z}$; $\vec{P} = m\vec{V}(G) = 2ml\sin\theta\,\vec{y} - ml\dot{\theta}\,\vec{y}$

$\tau_C = [m\vec{V}(G); -\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\,\vec{z}]$

5- $\tau_D = [m\vec{\gamma}(G); \vec{\delta}(G;(AB)/R)]$

1 pt $\vec{\gamma}(G) = 2l\ddot{\theta}\cos\theta\,\vec{y} - l\ddot{\theta}\,\vec{y_5} - l\dot{\theta}^2\,\vec{x_5} - 2l\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{y}$

1 pt $\vec{\delta}(G;(AB)/R) = -\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\,\vec{z}$

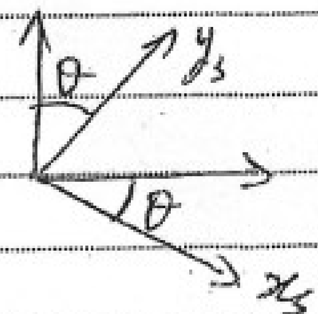
6- Th résultante dynamique.

$m\vec{\gamma}(G) = \vec{P} + \vec{R_A} + \vec{R_B}$

1 pt $\vec{P} = -mg\,\vec{y}$; $\vec{R_A} = \vec{T_A} + \vec{N_A} = N_A(f\vec{y} + \vec{x})$ $\quad \|\vec{T_A}\| = f\|\vec{N_A}\|$

1 pt $\vec{R_B} = \vec{T_B} + \vec{N_B} = N_B(-f\vec{x} + \vec{y})$ $\quad \|\vec{T_B}\| = f\|\vec{N_B}\|$

$(\vec{T_A}\cdot\vec{V_A} < 0$ et $\vec{T_B}\cdot\vec{V_B} < 0)$



$\vec{\gamma}(G) = -(l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta)\,\vec{x}$
$\quad + (l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{y}$

1 pt
$$\begin{cases} N_A - fN_B = (-l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta)m \\ fN_A + N_B - mg = (l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta)m \end{cases}$$

(T)

$N_B = mg + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta - f[fN_B - ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta]$

$(1+f^2)N_B = ml\ddot{\theta}(\cos\theta + f\sin\theta) - ml\dot{\theta}^2(\sin\theta - f\cos\theta) + mg$

1 pt $N_B = \dfrac{m[l\ddot{\theta}(\cos\theta + f\sin\theta) - l\dot{\theta}^2(\sin\theta - f\cos\theta)] + mg}{1+f^2}$

$N_A = fN_B - ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta$

$T_A = fN_A \quad ; \quad T_B = -fN_B$

7- Th du moment dynamique

$\vec{\delta}_A(A;(AB)/R) = \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{R}_B) + \vec{M}_A(\vec{P})$

$\vec{M}_A(\vec{R}_A) = 0 \quad ; \quad \vec{M}_A(\vec{R}_B) = \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \quad ; \quad \vec{M}_A(\vec{P}) = +mg\vec{y} \wedge \vec{AG}$

$\vec{M}_A(\vec{R}_B) = 2l\vec{x}_s \wedge (-fN_B\vec{x} + \vec{y}N_B) = 2l(fN_B\sin\theta + N_B\cos\theta)\vec{z}$

1 pt $\vec{M}_A(\vec{R}_B) = 2lN_B(\cos\theta - f\sin\theta)\vec{z}$

1 pt $\vec{M}_A(\vec{P}) = mgl\,\vec{y} \wedge \vec{x}_s = -mgl\cos\theta\,\vec{z}$

$\vec{\delta}(A,(AB)/R) = \vec{\delta}(G,AB/R) + m\vec{AG} \wedge \vec{\gamma}(G)$

$\vec{AG} \wedge \vec{\gamma}(G) = l\vec{x}_s \wedge ((2l\ddot{\theta}\cos\theta - 2l\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{y} - l\ddot{\theta}\vec{y}_s - l\dot{\theta}^2\vec{x}_s)$

$\vec{AG} \wedge \vec{\gamma}(G) = [2l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2l\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - l^2\ddot{\theta}]\vec{z}$

1 pt $\vec{\delta}(A,(AB)/R) = \left[-\dfrac{4ml^2}{3}\ddot{\theta} + 2ml^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{z}$

$2lN_B(\cos\theta - f\sin\theta) - mgl\cos\theta = -\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} + 2ml^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$

eq du mvt : on élimine N_B

$$2\ell \ddot{x}\left\{ m\left[\ell\ddot{\theta}(\cos\theta + f\sin\theta) - \ell\dot{\theta}^2(\sin\theta - f\cos\theta)\right] + mg\right\}(\cos\theta - f\sin\theta)$$

$$= (1+f^2)\left[-\tfrac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + 2m\ell^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - 2m\ell^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right] + (1+f^2)mg\ell\cos$$

1 pt $\ddot{\theta}\left[2\cos^2\theta - f\sin 2\theta + \frac{4(1+f^2)}{3} - 2\cos^2\theta\right]$

$$-\dot{\theta}^2\left[2(\sin\theta - f\cos\theta)(\cos\theta - f\sin\theta) - (1+f^2)\sin 2\theta\right]$$

$$+\frac{g}{\ell}(1-f^2)(\cos\theta - f\sin\theta) = 0.$$

8- $f = 0$

1 pt $\tfrac{4}{3}\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\cos\theta = 0$

$$\ddot{\theta} + \tfrac{3}{4}\frac{g}{\ell}\cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta}\cdot\dot{\theta} + \tfrac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\theta\,\dot{\theta} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\tfrac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\theta + cste$$

à $t = 0$; $\dot{\theta} = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$

1 pt $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2\ell}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

9- $2E_c = m\vec{V}^2(G) + \vec{\sigma}(G,(AB)/R)\cdot\vec{\omega}((AB)/R)$

$$2E_c = \tfrac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + m\ell^2\dot{\theta}^2 - 4m\ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$$

0,5 $2E_c = \tfrac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2$

0,5 $\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{V}(G/R) = -mg\ell\dot{\theta}\cos\theta$

Th. Energie cinétique :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{R_A})}_{0} + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{R_B})}_{0} = \frac{dE_c}{dt}$$

0,5 $-mgl\dot{\theta}\cos\theta = \frac{dE_c}{dt}$

$E_c = -mgl\sin\theta + cste.$

$\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 = -mgl\sin\theta + cste.$

$\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2}g\sin\theta + cste$

0,5 $\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année universitaire 2011-2012
Session printemps

Filière SMP-S4

Contrôle de Mécanique du Solide
Durééeîh30

Exercice 1 :

Dans le repère $R(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$, soient A(3,0,0) et B(-1,2,1) deux points de l'espace. Soit $\vec{M}$ un champ de vecteurs défini par :

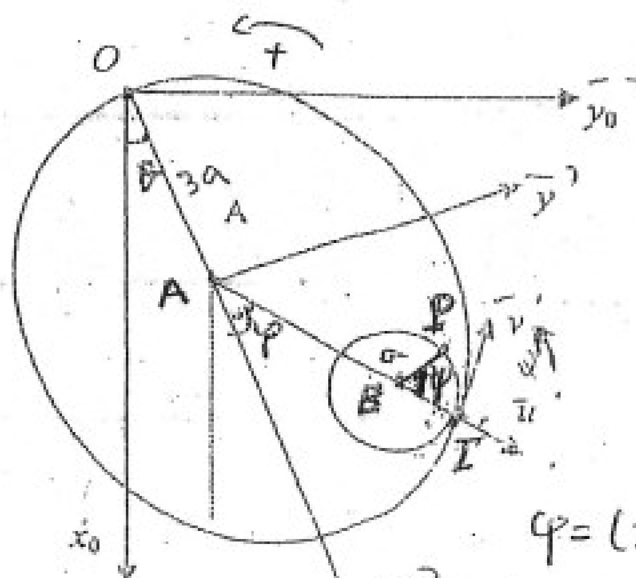
$$\vec{M}(O) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \vec{M}(A) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{M}(B) = \begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix}$$

1- Montrer que $\vec{M}$ est un champ antisymétrique.
2- Déterminer la résultante $\vec{R}$ du torseur associé au champ $\vec{M}$.
3- En déduire $\vec{M}(P)$ en tout point $P(x,y,z)$ de l'espace.
4- Déterminer l'axe central Δ du torseur, et calculer $\vec{M}$ sur Δ.

Exercice 2 :

Dans un plan vertical fixe, un cerceau C_1 de centre A et de rayon $3a$ est mobile sans frottement autour d'un de ces points O maintenu fixe. Un second cerceau C_2 de centre B et de rayon a peut rouler sans glisser à l'intérieur du premier cerceau tout en restant en contact avec lui au point I. Soit Ox_0 l'axe descendant du référentiel absolu $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ un repère relatif orthonormé direct lié au cerceau C_1 tel que $\vec{x} = \dfrac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$. Soit $R_2(B, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ un deuxième repère intermédiaire orthonormé direct lié au cerceau C_2 sachant que $\vec{u} = \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$. On note par $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ et $\varphi = (\vec{x}, \vec{u})$; et par ψ l'angle que fait un point P du cerceau C_2 avec l'axe Ou. Tous les résultats devront être exprimés dans la base du repère R_2.

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique $\tau_A(C_1)$, par rapport au repère R_0, du cerceau C_1 au point A. En déduire le torseur cinématique au point de contact I de C_1.
2- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique $\tau_B(C_2)$, par rapport au repère R_0, du cerceau C_2 au point B. En déduire le torseur cinématique au point de contact I de C_2.
3- Déterminer la vitesse de glissement du cerceau C_2, $\vec{V}_g(C_2/C_1)$ au point de contact I. En déduire, à partir de la condition de roulement sans glissement, une équation de mouvement reliant $\dot\psi$, $\dot\theta$ et $\dot\varphi$.
4- Calculer les vitesses relatives $\vec{V}_r(I \in C_2/R_1)$ et $\vec{V}_r(I \in C_1/R_1)$. Retrouver la vitesse de glissement $\vec{V}_g(C_2/C_1)$.
5- Calculer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(I \in R_1/R_0)$ du point de contact I de C_2, en déduire la vitesse absolue $\vec{V}(I \in C_2/R_0)$.



Mécanique - solide : SMP-S4

Ex 1 : 6 pts

$A(3,0,0)$; $B(-1,2,1)$

$\vec{M}(O) = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{M}(A) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{M}(B) = \begin{pmatrix}2\\-1\\9\end{pmatrix}$

1- Champ antisymétrique $\Leftrightarrow$ champ équiprojectif.

$\vec{OA}\cdot\vec{M}(O) = 3$; $\vec{OA}\cdot\vec{M}(A) = 3 \Rightarrow \vec{OA}\cdot\vec{M}(O) = \vec{OA}\cdot\vec{M}(A)$

2- $\vec{M}(A) = \vec{M}(O) + \vec{R}\wedge\vec{OA}$

$\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\gamma\\-3\beta\end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = 0,\ \beta = 1$ 1 pt

$\vec{M}(B) - \vec{M}(O) = \vec{R}\wedge\vec{OB}$

$\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta-2\gamma\\-\gamma-\alpha\\2\alpha+\beta\end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = 0,\ \beta = 1,\ \alpha = 2$ 1 pt

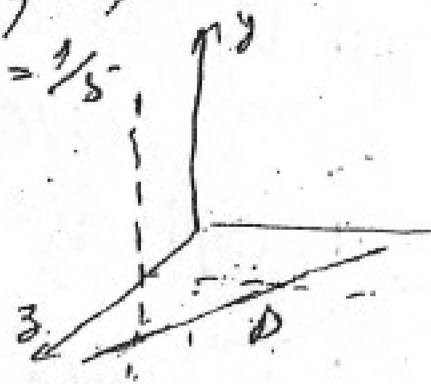
$\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ (1/2)

3- $\vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R}\wedge\vec{OP} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+z\\1-2z\\4+2y-x\end{pmatrix}$ 1 pt

4- $\vec{M}(P) = \lambda\vec{R}$ $(P\in\Delta)$

$\begin{cases}1+z = 2\lambda\\1-2z = \lambda\\4+2y-x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z = 1/5\\y = \frac{1}{2}(x-4)\end{cases}$ 1 pt

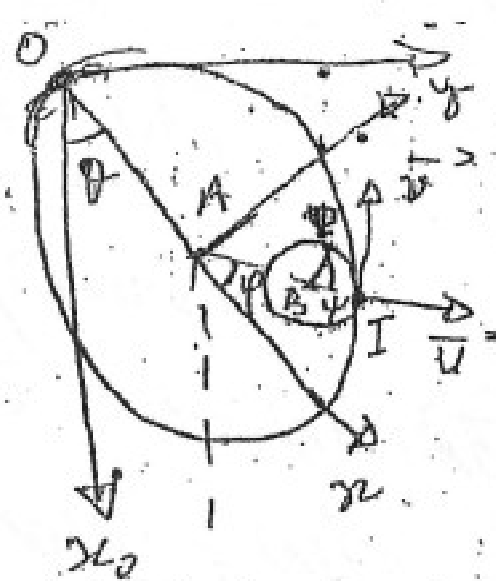
Δ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}(x-4)$ qui se trouve dans le plan $z = 1/5$.



$z = 1/5 \rightarrow \lambda = 3/5 \Rightarrow \vec{M}(P\in\Delta) = \frac{3}{5}\vec{R} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 1 pt

$\vec{M}(P\in\Delta) = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2}\vec{R} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\tau_A(C_1) = [\vec{\omega}(C_1/R_0), \vec{V}(A/R_0)]$ SMP S4



pt $\vec{\omega}(C_1/R_0) = \dot{\theta}\vec{z_0}$

$\vec{V}(A) = \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{OA} = 3a\dot{\theta}\vec{y}$

pt $\vec{V}(A) = 3a\dot{\theta}(\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{v})$

$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\omega}(C_1/R_0) \wedge \vec{AI}$

$\vec{V}(I/R_0) = 3a\dot{\theta}\vec{y} + 3a\dot{\theta}\vec{v}$

pt $\vec{V}(I/R_0) = 3a\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u} + 3a\dot{\theta}(1+\cos\varphi)\vec{v}$

$\tau_I(C_1) = [\vec{\omega}(C_1/R_0), \vec{V}(I/R_0)]$

$\tau_B(C_2) = [\vec{\omega}(C_2/R_0), \vec{V}(B/R_0)]$

5pt $\vec{\omega}(C_2/R_0) = (\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi})\vec{z_0}$

$\vec{V}(B/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \frac{d\vec{AB}}{dt}\Big|_{R_0} = 3a\dot{\theta}\vec{y} + 2a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{z_0} \wedge \vec{AB}$

1,5pt $\vec{V}(B/R_0) = 3a\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u} + [3a\dot{\theta}\cos\varphi + 2a\dot{\varphi} + 2a\dot{\theta}]\vec{v}$

$\vec{V}(I \in C_2/R_0) = \vec{V}(B/R_0) + \vec{\omega}(C_2/R_0) \wedge \vec{BI}$

pt $\vec{V}(I \in C_2/R_0) = 3a\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u} + [3a\dot{\theta}\cos\varphi + 3a\dot{\theta} + 3a\dot{\varphi} + a\dot{\psi}]\vec{v}$

$\tau_I(C_2) = [\vec{\omega}(C_2/R_0), \vec{V}(I \in C_2/R_0)]$

1pt $\vec{V_g}(C_2/C_1) = \vec{V}(I \in C_2/R_0) - \vec{V}(I \in C_1/R_0)$

1pt $\vec{V_g}(C_2/C_1) = (3a\dot{\varphi} + a\dot{\psi})\vec{v}$

0,5pt $\vec{V_g} = 0 \Rightarrow \dot{\psi} + 3\dot{\varphi} = 0$

0,5pt $\vec{V_r}(I \in C_2/R_1) = \vec{V_r}(B/R_1) + \vec{\omega}(C_2/R_1) \wedge \vec{BI}$

$= 2a\dot{\varphi}\vec{v} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi})\vec{z_0} \wedge a\vec{u}$

1pt $\vec{V_r}(I \in C_2/R_1) = (3a\dot{\varphi} + a\dot{\psi})\vec{v}$
0,5pt $\vec{V_r}(I \in C_1/R_1) = 0$
$\Big\} \Rightarrow \vec{V_g} = \vec{V_r}(I \in C_2/R_1) = (3a\dot{\varphi} + a\dot{\psi})\vec{v}$ 0,5pt

$\vec{V_e}(I \in R_1/R_0) = \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{OI} = \dot{\theta}\vec{z_0} \wedge (3a\vec{x} + 3a\vec{u})$

$= 3a\dot{\theta}\vec{y} + 3a\dot{\theta}\vec{v}$

1pt $\vec{V_e}(I \in R_1/R_0) = 3a\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u} + 3a\dot{\theta}(1+\cos\varphi)\vec{v}$

$\vec{V}(I \in C_2/R_0) = \vec{V_r} + \vec{V_e} = 3a\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u} + [3a\dot{\theta}\cos\varphi + 3a\dot{\theta} + 3a\dot{\varphi} + a\dot{\psi}]\vec{v}$

1pt

Shck

UNIVERSITE MOHAMMED V-Agdal
FACULTE DES SCIENCES
Département de physique

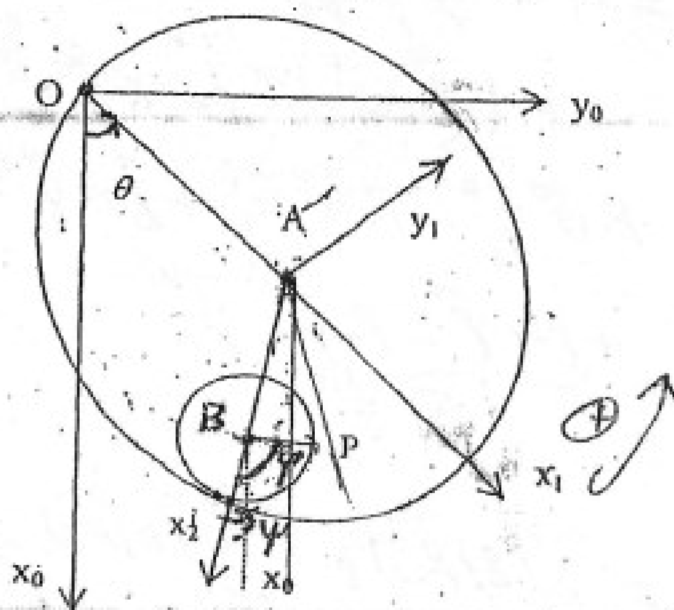
Rabat le : 17-11-07

Contrôle de Mécanique du Solide
SMI-SM-S3
Section A Groupe A02

Dans un plan vertical fixe d'un repère absolu $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un cerceau C de centre A, de rayon R , auquel est lié un repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, est mobile autour d'un de ces points O maintenu fixe. Un disque D de centre B, de rayon $a < R$, auquel est lié un repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, peut rouler sans glisser à l'intérieur du cerceau.

On pose $\theta = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1})$, $\psi = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_2})$ et $\varphi = (\widehat{\vec{x}_2, \overrightarrow{BP}})$ où P est un point du disque D..

1- Déterminer la vitesse de rotation du cerceau $\vec{\omega}(C/R_0)$ et celle du disque $\vec{\omega}(D/R_0)$.
2- Calculer la vitesse absolue du centre A du cerceau C.
3- Calculer la vitesse absolue du centre B du disque D. En déduire la vitesse absolue du point I du disque $\vec{V}(I \in D/R_0)$.
4- Calculer la vitesse de glissement du disque sur le cerceau $\vec{V}_g(I \in D/C)$. Déduire à partir de la condition de roulement sans glissement une équation du mouvement qui lie les différents paramètres du système.
5- Calculer l'accélération absolue du point I du disque $\vec{\gamma}(I \in D/R_0)$.



Contrôle 1
SMI S$_3$ - Gr A$_2$

1- $\vec{\omega}(C/R_0) = \dot{\theta}\,\vec{z}_0$; $\vec{\omega}(D/R_0) = (\dot{\varphi} - \dot{\psi})\vec{z}_0$

2- $\vec{V}(A/R_0) = R\dot{\theta}\,\vec{y}_1$

3- $\vec{V}(B/R_0) = -(R-r)\dot{\psi}\,\vec{y}_2 + R\dot{\theta}\,\vec{y}_1$

$\vec{V}(I\in D/R_0) = \vec{V}(B/R_0) + \vec{\omega}(D/R_0)\wedge\vec{BI}$

$= -(R-r)\dot{\psi}\,\vec{y}_2 + (\dot{\varphi} - \dot{\psi})\vec{z}_0 \wedge r\vec{x}_2 + R\dot{\theta}\,\vec{y}_1$

$\vec{V}(I\in D/R_0) = \boxed{R\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + [r\dot{\varphi} - R\dot{\psi}]\vec{y}_2}$

4- $\vec{V}_g = \vec{V}(I\in D/R_0) - \vec{V}(I\in C/R_0)$

$\vec{V}(I\in C/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\omega}(C/R_0)\wedge\vec{AI}$

$= R\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_0 \wedge R\vec{x}_2$

$\vec{V}(I\in C/R_0) = \boxed{R\dot{\theta}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)}$

$\vec{V}_g = [r\dot{\varphi} - R\dot{\psi} - R\dot{\theta}]\,\vec{y}_2$

$\vec{V}_g = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{R}{r}(\dot{\psi} + \dot{\theta})}$

5- 1ère méthode

$\vec{\gamma}(I\in D/R_0) = \vec{\gamma}(B/R_0) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}(D/R_0)\wedge\vec{BI} + \vec{\omega}(D/R_0)\wedge(\vec{\omega}(D/R_0)\wedge\vec{BI})$

$= -(R-r)\ddot{\psi}\,\vec{y}_2 + (R-r)\dot{\psi}^2\vec{x}_2 - (\dot{\varphi} - \dot{\psi})^2 r\,\vec{x}_2$

$+ (\ddot{\varphi} - \ddot{\psi})r\,\vec{y}_2 + R\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{x}_1$

$\vec{\gamma}(I\in D/R_0) = R\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 - R\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + [R\dot{\psi}^2 - 2r\dot{\psi}^2 - r\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}\dot{\psi}]\,\vec{x}_2$

$+ \underbrace{(r\ddot{\varphi} - R\ddot{\psi})}_{R\ddot{\theta}}\,\vec{y}_2$

2ème méthode

$\vec{\gamma}(P\in D/R_0) = \vec{\gamma}(B/R_0) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}(D/R_0)\wedge\vec{BP} + \vec{\omega}(D/R_0)\wedge(\vec{\omega}(D/R_0)\wedge\vec{BP})$

$P \to I$, $\varphi = 0$, $\vec{x}_3 \to \vec{x}_2$, $\vec{y}_3 \to \vec{y}_2$

on obtient le résultat.

Rabat le : 20/11/07

iversité Mohammed V- Agdal
culté des Sciences
épartement de Physique

Contrôle de Mécanique du solide
SMI-SM-S3
Section A Groupe A04

Jn solide S_1, constitué par un cercle de rayon r_1, de centre C_1 est en contact en I avec un second cercle rigide S_2 de rayon r_2, de centre C_2. Le solide S_1 roule sans glisser sur l'axe Ox d'un repère fixe orthonormé direct $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ alors que le solide S_2 tourne autour d'un axe passant par C_2 et parallèle à l'axe C_1z du repère Galiléen $R_1(C_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On désigne par α, θ et φ les paramètres de position angulaire respectivement du point I pa rapport à R_1, d'un point $P_1 \in S_1$ et d'un point $P_2 \in S_2$ par rapport à $R'(C_1,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$.

On utilise $R'(C_1,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ comme repère de projection. d'axe C_1u passant par C_2. On appelle I_1 respectivement I_2 le point de S_1 et de S_2 qui se trouvent en I à l'instant considéré et on note par x la position du centre C_1.

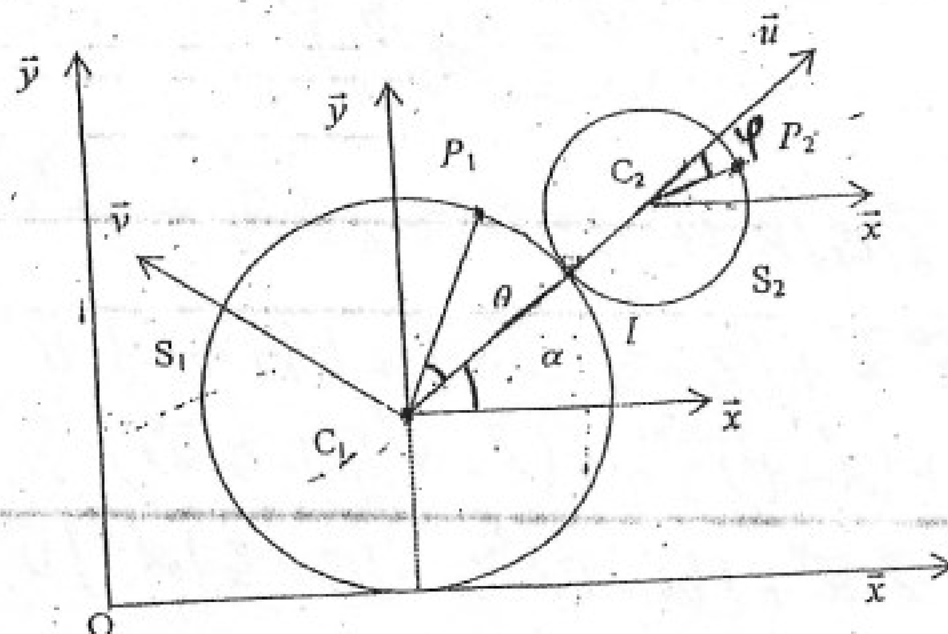
1- Déterminer la vitesse de rotation instantanée des solides S_1 et S_2 par rapport au repère absolue R_0., $\vec{\omega}(S_1/R_0)$ et $\vec{\omega}(S_2/R_0)$.

2- Calculer $\vec{v}(C_1/R_0)$. En déduire la vitesse $\vec{v}(I_1/R_0)$.

3- Calculer la vitesse $\vec{v}(C_2/R_0)$. En déduire $\vec{v}(I_2/R_0)$.

4- Calculer la vitesse de glissement $\vec{v}_g(S_2/S_1)$ de S_2 sur S_1. En déduire à partir de la condition de roulement sans glissement en I de S_2 sur S_1 l'expression de $\dot{\alpha}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.

5- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(I_2/R_0)$.



Contrôle 1
SMP S3 – Gr A4

1- ~~[scribbled out]~~

$\vec{\omega}(S_1/R_0) = (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{z}$, $\vec{\omega}(S_2/R_0) = (\dot{\alpha} - \dot{\varphi})\vec{z}$

2- $\vec{V}(C_1/R_0) = \dot{x}\vec{x}$

$\vec{V}(I_1/R_0) = \vec{V}(C_1/R_0) + \vec{\omega}(S_1/R_0) \wedge \vec{C_1 I_1}$

$\vec{V}(I_1/R_0) = \dot{x}\vec{x} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{z} \wedge r_1 \vec{u}$

$$\boxed{\vec{V}(I_1/R_0) = \dot{x}\vec{x} + (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) r_1 \vec{v}}$$

3- $\vec{V}(C_2/R_0) = \left.\frac{d\vec{OC_2}}{dt}\right|_{R_0} = \vec{V}(C_1/R_0) + \left.\frac{d\vec{C_1C_2}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{x}\vec{x} + (r_1 + r_2)\dot{\alpha}\vec{v}$

$\vec{V}(I_2/R_0) = \vec{V}(C_2/R_0) + \vec{\omega}(S_2/R_0) \wedge \vec{C_2 I_2}$

$= \dot{x}\vec{x} + (r_1 + r_2)\dot{\alpha}\vec{v} + (\dot{\alpha} - \dot{\varphi})\vec{z} \wedge (-r_2 \vec{u})$

$\vec{V}(I_2/R_0) = \dot{x}\vec{x} + [(r_1 + r_2)\dot{\alpha} - (\dot{\alpha} - \dot{\varphi}) r_2]\vec{v}$

$$\boxed{\vec{V}(I_2/R_0) = \dot{x}\vec{x} + [r_1\dot{\alpha} + r_2\dot{\varphi}]\vec{v}}$$

4- $\vec{V_g}(S_2/S_1) = \vec{V}(I_2/R_0) - \vec{V}(I_1/R_0)$

$\vec{V_g}(S_2/S_1) = (r_2\dot{\varphi} - r_1\dot{\theta})\vec{v}$

$\vec{V_g} = 0 \Rightarrow r_2\dot{\varphi} - r_1\dot{\theta} = 0$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}}$$

5- 1er méthode

$\vec{\gamma}(I_2/R_0) = \vec{\gamma}(C_2/R_0) + \frac{d\vec{\omega}(S_2/R_0)}{dt} \wedge \vec{C_2 I_2} + \vec{\omega}(S_2/R_0) \wedge (\vec{\omega}(S_2/R_0) \wedge \vec{C_2 I_2})$

$= \ddot{x}\vec{x} + (r_1 + r_2)\ddot{\alpha}\vec{v} - (r_1 + r_2)\dot{\alpha}^2\vec{u} + (\ddot{\alpha} - \ddot{\varphi}) \wedge (-r_2\vec{u})$

$+ (\dot{\alpha} - \dot{\varphi})\vec{z} \wedge ((\dot{\alpha} - \dot{\varphi})\vec{z} \wedge (-r_2\vec{u}))$

$= \ddot{x}\vec{x} + [(\dot{\alpha} - \dot{\varphi})^2 r_2 - (r_1 + r_2)\dot{\alpha}^2]\vec{u} + [(r_1 + r_2)\ddot{\alpha} - r_2(\ddot{\alpha} - \ddot{\varphi})]\vec{v}$

$[r_1\ddot{\alpha} + r_2\ddot{\varphi}]\vec{v}$

2ème méthode

$\vec{\gamma}(P_2/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(P_2/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d\vec{V}(C_2/R_0)}{dt} + \frac{d\vec{\omega}(S_2/R_0)}{dt} \wedge \vec{C_2 I_2} + \vec{\omega}(S_2/R_0) \wedge (\vec{\omega}(S_2 \ldots$

$\vec{\gamma}(I_2/R_0) = \vec{\gamma}(P_2 \to I_2/R_0)$ / $\varphi = \pi$, $\vec{x_s} \to -\vec{u}$, $\vec{y_s} \to -\vec{v}$

~ dit

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année universitaire 2010-2011
SMI&SMA: Semestre 3

Contrôle continu n°1 – Mécanique du Solide
Durée 45 mn

On considère deux tiges (T) et (T'), rectilignes, de longueurs ℓ et ℓ', articulées en A, en mouvement dans le plan vertical (xOy) du repère fixe R(O,x,y,z). La tige (T) est fixée par l'une des ses extrémités au point O. La tige (T') est articulée par son extrémité C au centre d'un disque (D) de rayon r **(voir figure).**

Le disque (D) roule sur l'axe $o\vec{x}$ avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$ tout en restant dans le plan vertical xoy.

On désigne par θ l'angle formé, à chaque instant par l'axe $o\vec{x}$ et la tige (T) et α l'angle formé par l'axe $\vec{Cx}$ et le vecteur $\vec{AC}$. On suppose que $\ell < \ell'$, $r < \ell'$ et $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

1- Donner la relation entre α et θ. En déduire l'expression de $\dot{\alpha}$ en fonction de ℓ, ℓ', θ et $\dot{\theta}$.

2- Déterminer le torseur cinématique en A de la tige (T) par rapport au repère R.

3- Déterminer le torseur cinématique en C de la tige (T') par rapport au repère R

4- Calculer la vitesse $\vec{V}(P/R)$ par rapport au repère R, d'un point P de la circonférence du disque (D) tel que $\varphi = (\widehat{c\vec{x}, c\vec{p}})$.

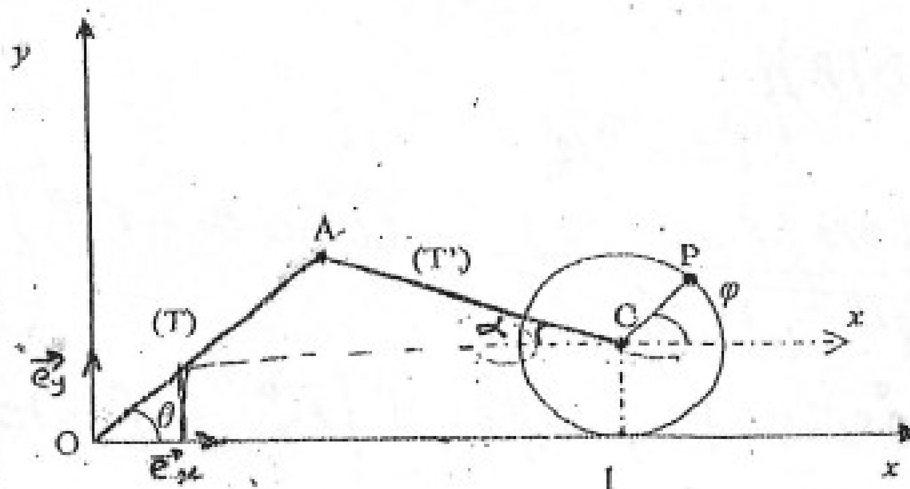
5- Montrer que la vitesse de glissement du disque (D) sur l'axe $o\vec{x}$ s'écrit :

$$\vec{V}_g(C/o\vec{x}) = [-\ell\dot{\theta}\sin\theta(1 + f(\theta)) + r\dot{\varphi}]\vec{e}_x.$$

Où $f(\theta)$ est une fonction de θ que l'on déterminera. En déduire la condition du roulement sans glissement.

6- Donner l'expression du vecteur accélération $\vec{a}(I \in D/R)$ du point P lorsqu'il coïncide avec le point de contact I du disque (D) avec l'axe $o\vec{x}$.

<u>N.B : la question 6 est supplémentaire</u>



1-

$$\frac{\sin\theta}{l'} = \frac{\sin\alpha}{l - OB} = \frac{\sin\alpha}{l - \frac{r}{\sin\theta}}$$

(3pts)

$$\sin\theta = \frac{r}{OB}$$

$$\sin\alpha = \frac{l\sin\theta - r}{l'}$$

$$\dot\alpha\cos\alpha = \frac{l\dot\theta}{l'}\cos\theta$$

y, x, O, B, A, C, l, l', θ, α, $\vec{e_v}$, $\vec{e_u}$, $\vec{e'}$

2- $\mathcal{T}_V^A(T) = [\vec\omega(T/R), \vec V(A/R)]$

(4pts)

$\vec\omega(T/R) = \dot\theta\,\vec{e_z}$; $\vec V(A/R) = l\dot\theta\,\vec{e_V} = l\dot\theta(-\sin\theta\,\vec{e_x} + \cos\theta\,\vec{e_y})$

3- $\mathcal{T}_V^C(T') = [\vec\omega(T'/R), \vec V(C/R)]$

(4pts)

$\vec\omega(T'/R) = -\dot\alpha\,\vec{e_z}$; $\vec V(C/R) = \vec V(A/R) + \vec\omega(T'/R)\wedge\vec{AC}$

$\vec V(C/R) = l\dot\theta\,\vec{e_V} + (-\dot\alpha\,\vec{e_z}\wedge(+l'\vec{e'_u})) = l\dot\theta\,\vec{e_V} - \dot\alpha\, l'\vec{e'_V}$

$= l\dot\theta\,\vec{e_V} - \dot\alpha l'(\cos\alpha\,\vec{e_y} + \sin\alpha\,\vec{e_x})$

$\vec V(C/R) = (-l'\dot\alpha\sin\alpha - l\dot\theta\sin\theta)\,\vec{e_x} + \underbrace{(-l'\dot\alpha\cos\alpha + l\dot\theta\cos\theta)}_{=0}\,\vec{e_y}$

$\vec V(C/R) = -(l'\dot\alpha\sin\alpha + l\dot\theta\sin\theta)\,\vec{e_x}$

y, α

4- $\vec V(P/R) = \vec V(C/R) + \vec\omega(D/R)\wedge\vec{CP}$

(4pts)

$= -(l'\dot\alpha\sin\alpha + l\dot\theta\sin\theta)\,\vec{e_x} + r\dot\varphi\,\vec{e_z}\wedge(\cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\varphi\,\vec{e_y})$

$\vec V(P/R) = -(l'\dot\alpha\sin\alpha + l\dot\theta\sin\theta + r\dot\varphi\sin\varphi)\,\vec{e_x} + r\dot\varphi\cos\varphi\,\vec{e_y}$

5- $\vec V_g(D/Ox) = \vec V(I\in D/R) - \underbrace{\vec V(I\in Ox/R)}_{=0}$

$= \vec V(P\in D/R)\big|_{\varphi = -\pi/2}$

(5pts)

$$\vec V_g(D/Ox) = +\left(-\frac{l\dot\theta\cos\theta(l\sin\theta - r)}{\sqrt{l'^2 - (l\sin\theta - r)^2}} - l\dot\theta\sin\theta + r\dot\varphi\right)\vec{e_x}$$

$$= +\left[-l\dot\theta\sin\theta(1 + f(\theta)) + r\dot\varphi\right]\vec{e_x} \;;\; f(\theta) = \frac{\cot\theta(l\sin\theta - r)}{\sqrt{l'^2 - (l\sin\theta - r)^2}}$$

$$\vec V_g = 0 \Rightarrow r\dot\varphi = +l\dot\theta\sin\theta(1 + f(\theta)) = \frac{-d}{dt}\left(l\cos\theta + \sqrt{l'^2 - (l\sin\theta - r)^2}\right)$$

6- $\vec a(P/R) = -(l'\ddot\alpha\sin\alpha + l\dot\alpha^2\cos\alpha + l\ddot\theta\sin\theta + l\dot\theta^2\cos\theta + r\ddot\varphi\sin\varphi + r\dot\varphi^2\cos\varphi)\,\vec{e_x} + (r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi)\,\vec{e_y}$

$\vec a(I/R) = \vec\gamma(P/R)\big|_{\varphi = -\pi/2} = -(l'\ddot\alpha\sin\alpha + l\dot\alpha^2\cos\alpha + l\ddot\theta\sin\theta + l\dot\theta^2\cos\theta - r\ddot\varphi)\,\vec{e_x}$

(+2pts)

$$= -r\dot\varphi^2\,\vec{e_y} = -\frac{l^2\dot\theta^2\sin^2\theta}{r}(1 + f(\theta))^2\,\vec{e_y}$$

$-r\dot\varphi^2\,\vec{e_y}$